Momento angular y adición de momentos angulares.

Problemas del libro "Quantum Mechanics", *Nouredine Zettili*, primera edición.

- **Problema 5.6**
  Usando las propiedades de $\hat{J}_+$ y $\hat{J}_-$, calcular $|j, \pm j\rangle$ y $|j, \pm m\rangle$ como funciones de la acción de $\hat{J}_\pm$ sobre los estados $|j, \pm m\rangle$ y $|j, \pm j\rangle$, respectivamente.

- **Problema 5.8**
  Considere la función de onda

$$\psi(\theta, \varphi) = 3\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)e^{i\varphi} - 2\left(1 - \cos^2(\theta)\right)e^{2i\varphi}. \tag{1}$$

  (a) Escribir $\psi(\theta, \varphi)$ en términos de los armónicos esféricos.

  (b) Escribir la expresión encontrada en (a) en términos de coordenadas cartesianas.

  (c) ¿Es $\psi(\theta, \varphi)$ un eigenestado de $\hat{\vec{L}}^2$ o $\hat{L}_z$?

  (d) Encontrar la probabilidad de medir $2\hbar$ para la componente z del momento angular orbital.

- **Problema 5.11**
  (a) Demostrar que los siguientes valores de esperados entre los estados $|lm\rangle$ satisfacen las relaciones $\langle L_x\rangle = \langle L_x\rangle = 0$ y $\langle L_x^2\rangle = \langle L_y^2\rangle = \frac{1}{2}\left[l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2\right]$.

  (b) Verificar la desigualdad $\Delta L_x \Delta L_y \geq \hbar^2 m/2$, donde $\Delta L_x = \sqrt{\langle L_x^2\rangle - \langle L_x\rangle^2}$.

- **Problema 5.12**
  Una partícula de masa m está fija en un extremo de un barra rígido de masa despreciables y longitud R. El otro extremo de la barra gira en el plano xy alrededor de un cojinete situado en el origen, cuyo eje está en la dirección z.

  (a) Escribir la energía total del sistema en términos de su momento angular L.

  (b) Anotar la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo del sistema. *Sugerencia*: En coordenadas esféricas, sólo φ varía.

  (c) Resolver los posibles niveles de energía del sistema, en términos de m y el momento de inercia $I = mR^2$.

(d) Explicar por qué no hay energía en el punto cero.

- **Problema 5.13**
  Consideremos un sistema que es descrito por el estado

$$\psi(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8}}Y_{1,1}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{1}{8}}Y_{1,0}(\theta,\varphi) + AY_{1,-1}(\theta,\varphi), \tag{2}$$

donde A es una constante real.

(a) Calcular A tal que $|\psi\rangle$ sea normalizada.

(b) Encontrar $\hat{L}_+\psi(\theta,\varphi)$.

(c) Calcular los valores esperados de $\hat{L}_x$ y $\hat{L}^2$ en el estado $|\psi\rangle$.

(d) Encontrar la probabilidad asociada a una medida que da cero para la componente z del momento angular.

(e) Calcular $\langle\Phi|\hat{L}_z|\psi\rangle$ y $\langle\Phi|\hat{L}_-|\psi\rangle$, donde

$$\Phi(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{8}{15}}Y_{1,1}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{4}{15}}Y_{1,0}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{3}{15}}Y_{2,-1}(\theta,\varphi). \tag{3}$$

- **Problema 5.32**
  Considerar las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

(a) Verificar que $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$, donde I es la matriz

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(b) Calcular los conmutadores $[\sigma_x, \sigma_y]$, $[\sigma_y, \sigma_z]$ y $[\sigma_z, \sigma_x]$.

(c) Calcular el anticonmutador $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y, \sigma_x$.

(d) Mostrar que $e^{i\theta\sigma_y} = I\cos(\theta) + i\sigma_y \operatorname{sen}(\theta)$, donde I es la matriz unitaria.

(e) Derivar una expresión para $e^{i\theta\sigma_z}$ por analogía con el de σ_y.

- **Problema 5.33**
  Considerar una partícula con espín $\frac{3}{2}$ cuyo Hamiltoniano está dado por

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}\left(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2\right) - \frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}\hat{S}_z^2, \tag{6}$$

donde ε_0 es una constante que tiene las dimensiones de energía.

(a) Encontrar la matriz del Hamiltoniano y diagonalizarlo para encontrar los niveles de energía.

(b) Encontrar los vectores propios y verificar que los niveles de energía son doblemente degenerados.

- **Problema 7.6**
  Una partícula de espín $\frac{1}{2}$ está en un estado d del momento angular orbital (es decir, $l = 2$). Elabore el acoplamiento de los momentos angulares orbitales y de espín de esta partícula, y encuentre todos los estados y los correspondientes coeficientes Clebsch-Gordan.

- **Problema 7.7**
  El Hamiltoniano espín-dependiente de un sistema de electrón-positrón en presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z ($\vec{B} = B\vec{k}$) puede ser escrito como

$$\hat{H} = \lambda \hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 + \left(\frac{eB}{mc}\right)\left(\hat{S}_{1_z} - \hat{S}_{2_z}\right), \tag{7}$$

donde λ es un número real y $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ son los operadores de espín para el electrón y el positrón, respectivamente.

(a) Si la función de espín del sistema es dada por $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, encontrar los eigenvalores de energía y sus correspondientes eigenvectores.

(b) Repetir (a) en el caso donde $\lambda = 0$, pero $B \neq 0$.

(c) Repetir (a) en el caso donde $\lambda \neq 0$, pero $B = 0$.

Problemas del libro "Quantum Mechanics", *Nouredine Zettili*, segunda edición.

- **Problema 5.6**
  El Hamiltoniano debido a la interacción de una partícula de espín $\hat{S}$ con un campo magnético $\hat{B}$ esta dado por $\hat{H} = -\hat{S} \cdot \hat{B}$, donde $\hat{S}$ es el espín. Calcular el conmutador $\left[\hat{S}^2, \hat{H}\right]$.

- **Problema 5.8**
  Demostrar la siguiente relación:

$$\left[\hat{L}_z, \mathrm{sen}(2\varphi)\right] = 2i\hbar\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right), \tag{8}$$

donde φ es el ángulo azimutal. *Sugerencia*: $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C}$.

- **Problema 5.11**
  Considere la función de onda

$$\psi(\theta, \varphi) = 3\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)e^{i\varphi} - 2\left(1 - \cos^2(\theta)\right)e^{2i\varphi}. \tag{9}$$

(a) Escribir $\psi(\theta, \varphi)$ en términos de los armónicos esféricos.

(b) Escribir la expresión encontrada en (a) en términos de coordenadas cartesianas.

(c) ¿Es $\psi(\theta, \varphi)$ un eigenestado de $\hat{\vec{L}}^2$ o $\hat{L}_z$?

(d) Encontrar la probabilidad de medir $2\hbar$ para la componente z del momento angular orbital.

- **Problema 5.12**
  Demostrar que
  $$\hat{L}_z \left(\cos^2(\varphi) - \text{sen}^2(\varphi) + 2i \sin(\varphi)\cos(\varphi)\right) = 2\hbar e^{i2\varphi}, \tag{10}$$
  donde φ es el ángulo azimutal.

- **Problema 5.13**
  Encontrar las expresiones para los armónicos esféricos $Y_{3,0}(\theta, \varphi)$ y $Y_{3,\pm1}(\theta, \varphi)$,
  $$Y_{3,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{7/16\pi}\left(5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\right), \quad Y_{3,\pm1}(\theta, \varphi) = \sqrt{21/64\pi}\sin(\theta)\left(5\cos^2(\theta) - 1\right)e^{\pm i\varphi}, \tag{11}$$
  en términos de las coordenadas cartesianas x, y, z.

- **Problema 5.32**
  Encontrar los niveles de energía de una partícula de espín $\frac{5}{2}$ cuyo Hamiltoniano está dado por
  $$\hat{H} = \frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}\left(\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2\right) + \frac{\varepsilon_0}{\hbar}\hat{S}_z, \tag{12}$$
  donde ε_0 es una constante que tiene las dimensiones de energía. ¿Están los niveles de energía degenerados?

- **Problema 5.33**
  Considere un electrón cuya dirección de espín está situada en el plano xy.

  (a) Encontrar los eigenvalores (denotados por λ_1, λ_2) y los eigenestados ($|\lambda_1\rangle, |\lambda_2\rangle$) del operador espín de electrón $\vec{S}$.

  (b) Suponiendo que el estado inicial del electrón está dado por
  $$|\psi_0\rangle = \frac{1}{3}|\lambda_1\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{3}|\lambda_2\rangle, \tag{13}$$
  encontrar la probabilidad de obtener un valor de $\hat{S} = -\hbar/2$ después de medir el espín del electrón.

- **Problema 7.6**
  Considerar la función de onda de una partícula $\psi(\vec{r}) = \left(\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + z\right) f(r)$, donde $f(r)$ es una función esféricamente simétrica.

  (a) ¿Es $\psi(\vec{r})$ una eigenfunción de $\vec{L}^2$? Si es así, ¿cuál es el eigenvalor?

  (b) ¿Cuáles son las probabilidades de que la partícula se encuentre en el estado $m_l = -1$, $m_l = 0$ y $m_l = 1$?

(c) Si $\psi(\vec{r})$ es una eigenfunción de energía con eigenvalores E y si $f(r) = 3r^2$, encontrar las expresiones del potencial $V(r)$ a la que se somete esta partícula.

- **Problema 7.7**
  Consideremos una partícula cuya función de onda viene dada por

$$\psi(\vec{r}) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}Y_{1,1}(\theta,\varphi) - \frac{1}{5}Y_{1,-1}(\theta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_{1,0}(\theta,\varphi)\right) f(r), \tag{14}$$

donde $f(r)$ es una función radial normalizada, es decir, $\int_0^\infty r^2 f^2(r) dr = 1$.

(a) Calcular los valores esperados de $\hat{\vec{L}}^2$, $\hat{L}_z$ y $\hat{L}_x$ en este estado.

(b) Calcular los valores esperados de $V(\theta) = 2\cos^2(\theta)$ en este estado.

(c) Encuentra la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado $m_l = 0$.