



# FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS



## Termodinámica del universo *temprano*

Miguel Raúl Ordóñez Fernández

[raulfdz653@gmail.com](mailto:raulfdz653@gmail.com)

Docente: Karen Salomé Caballero Mora

Clase de termodinámica, FCFM-UNACH

---

# Resumen

---

Ciertamente, los físicos suelen reducir un problema de la naturaleza, *un problema real*, a su máxima simplicidad para, a partir de ahí, extraer toda la información posible; posteriormente se van resuelven los casos particulares que el problema pueda presentar, hasta llegar finalmente a su punto más complejo, que es el que quería estudiarse originalmente. La información obtenida del problema simplificado permite darnos una idea del funcionamiento del problema real, además de brindarnos suficientes herramientas para sacar conclusiones que, generalmente, son comprobadas de forma experimental.

En este caso se atenderá una cuestión *reciente* agregada a un conjunto de preguntas muy antiguas y profundas que rodean al hombre desde los albores de su existencia: el funcionamiento del universo. Se pretende estudiar la termodinámica del universo y, para ello, será necesario simplificar el problema. De la misma manera en que se puede estudiar a *una vaca esférica*, en el presente trabajo se abordará al universo temprano y al universo actual a grandes escalas, donde todo parece ser -un poco- más simple.

---

# Índice general

---

<b>1. Consideraciones . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1 Cosmología newtoniana . . . . .	5
1.2 Principio cosmológico . . . . .	6
1.3 Métrica FRLW . . . . .	7
1.3.1 k . . . . .	9
<b>2. Dinámica de la expansión . . . . .</b>	<b>15</b>
2.1 Ecuación de Friedmann . . . . .	17
2.2 Ley de conservación . . . . .	18
<b>3. Introducción de variables termodinámicas . . . . .</b>	<b>20</b>
3.1 Densidad del universo . . . . .	23
3.1.1 Densidad crítica . . . . .	24
<b>4. Calor específico del universo . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>5. El universo no tan temprano . . . . .</b>	<b>27</b>
5.1 Entropía . . . . .	28
5.1.1 Orden de mérito . . . . .	29
5.2 Densidad del universo . . . . .	31
<b>6. Conclusiones . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>7. Bibliografía . . . . .</b>	<b>35</b>

---

# Índice de figuras

---

1. Radiación de fondo de microondas. La diferencia máxima entre los puntos azules y rojos es aproximadamente 400 $\mu\text{K}$ . Crédito: NASA/WMAP Science Team. ....	6
2. Implicaciones geométricas del espacio según el signo de la constante k .....	8
3. Representación geométrica del signo de k en una superficie .....	10
4. Relación de la geometría con la que se describe un universo y su pasado, presente y futuro. ....	11
5. Valor de k en nuestro universo. ....	12
6. Modelo de evolución cósmica, ver descripción en el texto .....	14
7. Universos de Friedmann, ver descripción en el texto .....	15
8. Comportamiento del calor específico en función del factor de escala. ....	27
9. Tabla denominada “Orden de mérito”, ver descripción en el texto .....	30
10.La simulación del milenio. Imagen tomada de <a href="https://wallhere.com/es/wallpaper/41386">https://wallhere.com/es/wallpaper/41386</a> .....	FIN

---

# 1. Consideraciones

---

- Cosmología newtoniana (sin constante cosmológica)
- Validez del principio cosmológico
- Métrica FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker)

# ■ Principio cosmológico

*“A escalas suficientemente grandes, el universo es isótropo y homogéneo.”*

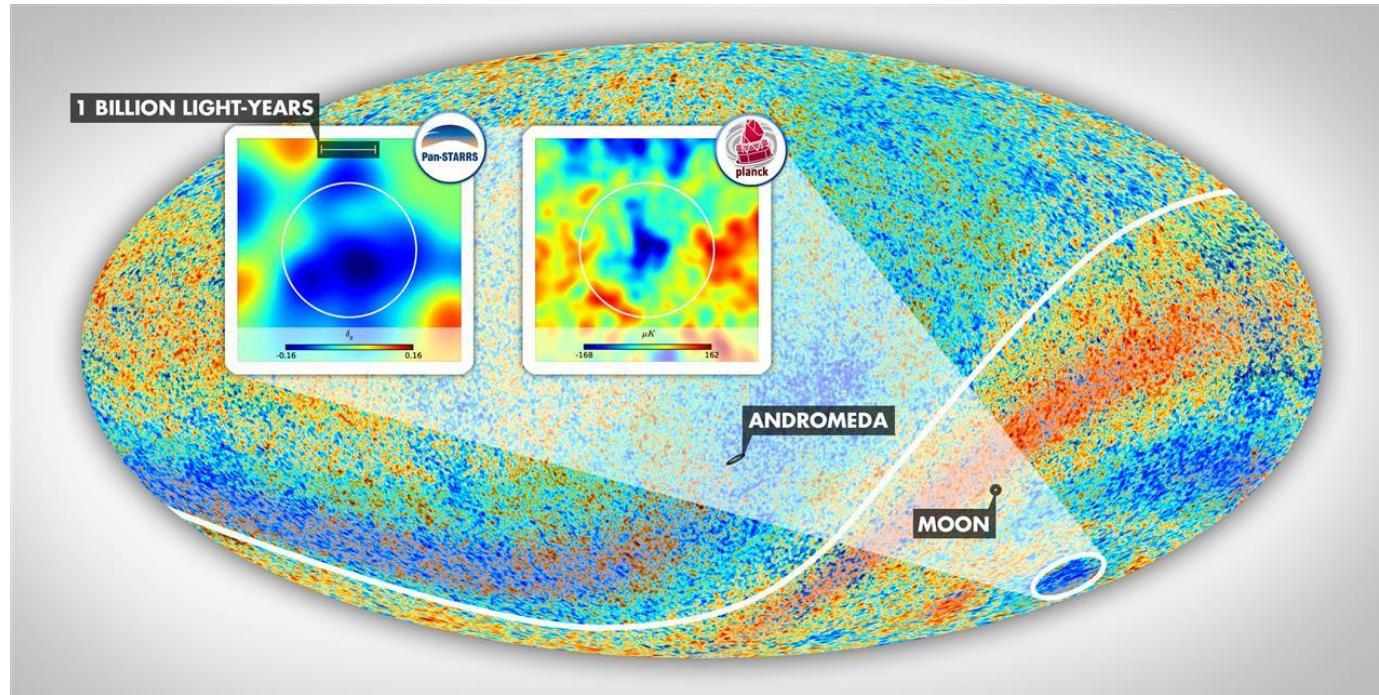


Figura 1. Radiación de fondo de microondas. La diferencia máxima entre los puntos azules y rojos es aproximadamente 400 micro Kelvin.

Crédito: NASA/WMAP Science Team

# ■ Métrica FRW

Se considera la geometría de un espacio tres dimensional homogéneo e isotrópico. <sup>1</sup>

$$ds^2 = d\vec{x}^2 + dz^2$$

$$z^2 + \vec{x}^2 = a^2$$

→ Superficie esférica

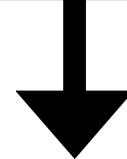
$$ds^2 = d\vec{x}^2$$

→ Superficie plana

$$ds^2 = d\vec{x}^2 - dz^2$$

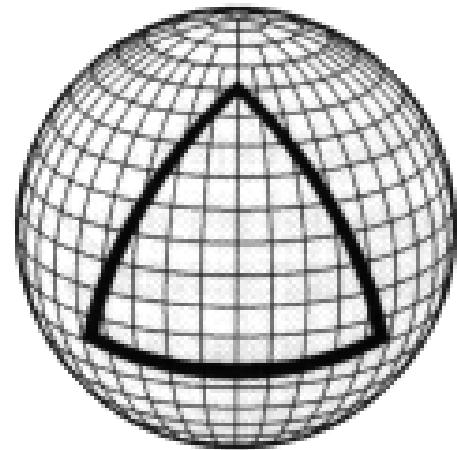
$$z^2 - \vec{x}^2 = a^2$$

→ Superficie hiperbólica

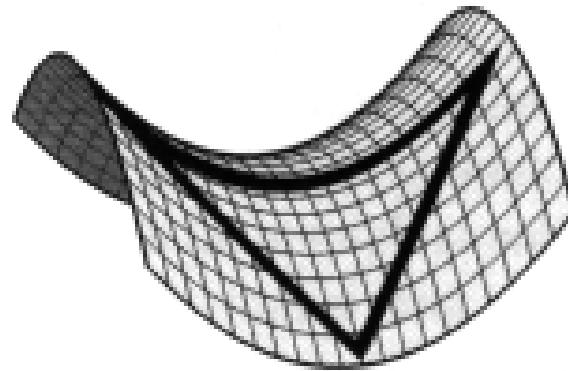


$$ds^2 = a^2 \left( d\vec{x}^2 + K \frac{(\vec{x} d\vec{x})^2}{1 - K \vec{x}^2} \right)$$

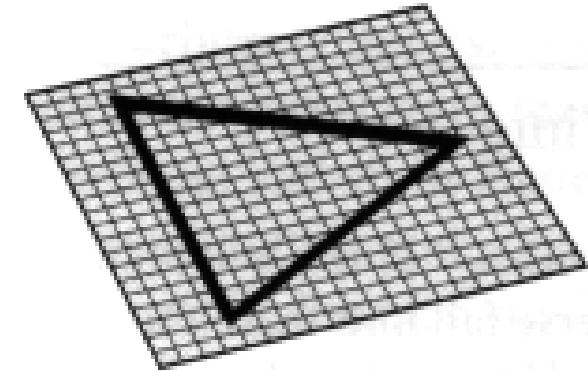
<sup>1</sup> S. Weinberg, Cosmology, 1.1 Spacetime geometry, 2, 3 (Oxford University Press, 2008).



**Closed Geometry**



**Open Geometry**



**Flat Geometry**

Figura 2. Implicaciones geométricas del espacio según el signo de la constante  $k$ .

## ■ k

“Un espacio que es homogéneo e isótropo es máximamente simétrico, es decir, tiene el número máximo de simetrías. Matemáticamente, las variedades que son máximamente simétricas son espacios con curvatura constante, una propiedad que se refleja en la siguiente condición sobre el tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = K(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})$$

Donde K es una constante que está relacionada con el radio de curvatura.”<sup>2</sup>

$$k = \frac{K}{|K|}$$

Tenemos así, un plano si  $k=0$ , una superficie esférica (o cerrada) para  $k=1$  y un hiperboloide (o superficie abierta, una silla de montar) cuando  $k=-1$

---

<sup>2</sup> Cosmología en la teoría general de la relatividad, Rafael Zamora Ramos.  
[http://rafaelzamora.es/Cosmologia\\_en\\_la\\_teoria\\_de\\_la\\_relatividad.pdf](http://rafaelzamora.es/Cosmologia_en_la_teoria_de_la_relatividad.pdf), 3

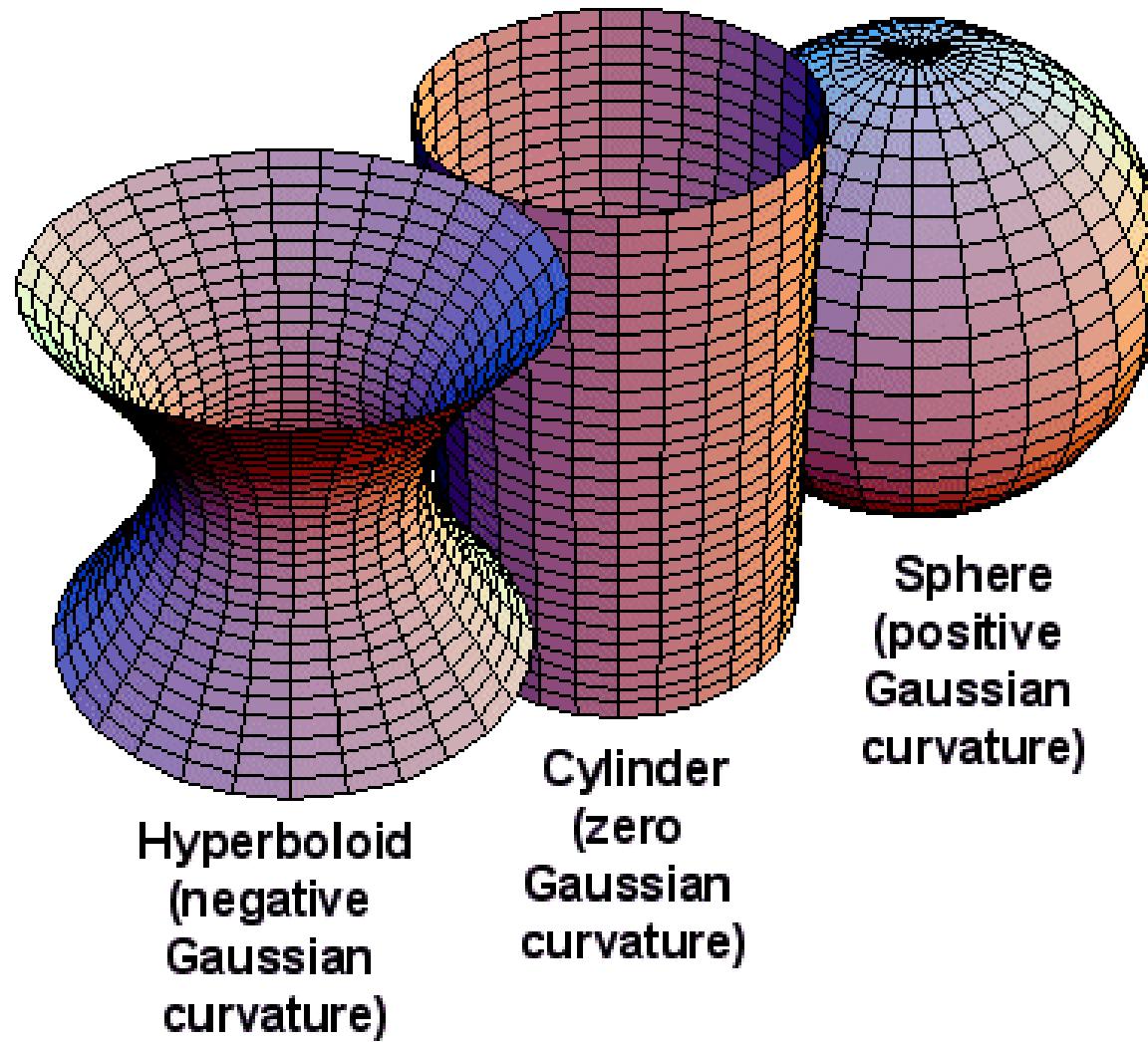


Figura 3. Representación geométrica del signo de  $k$  en una superficie.

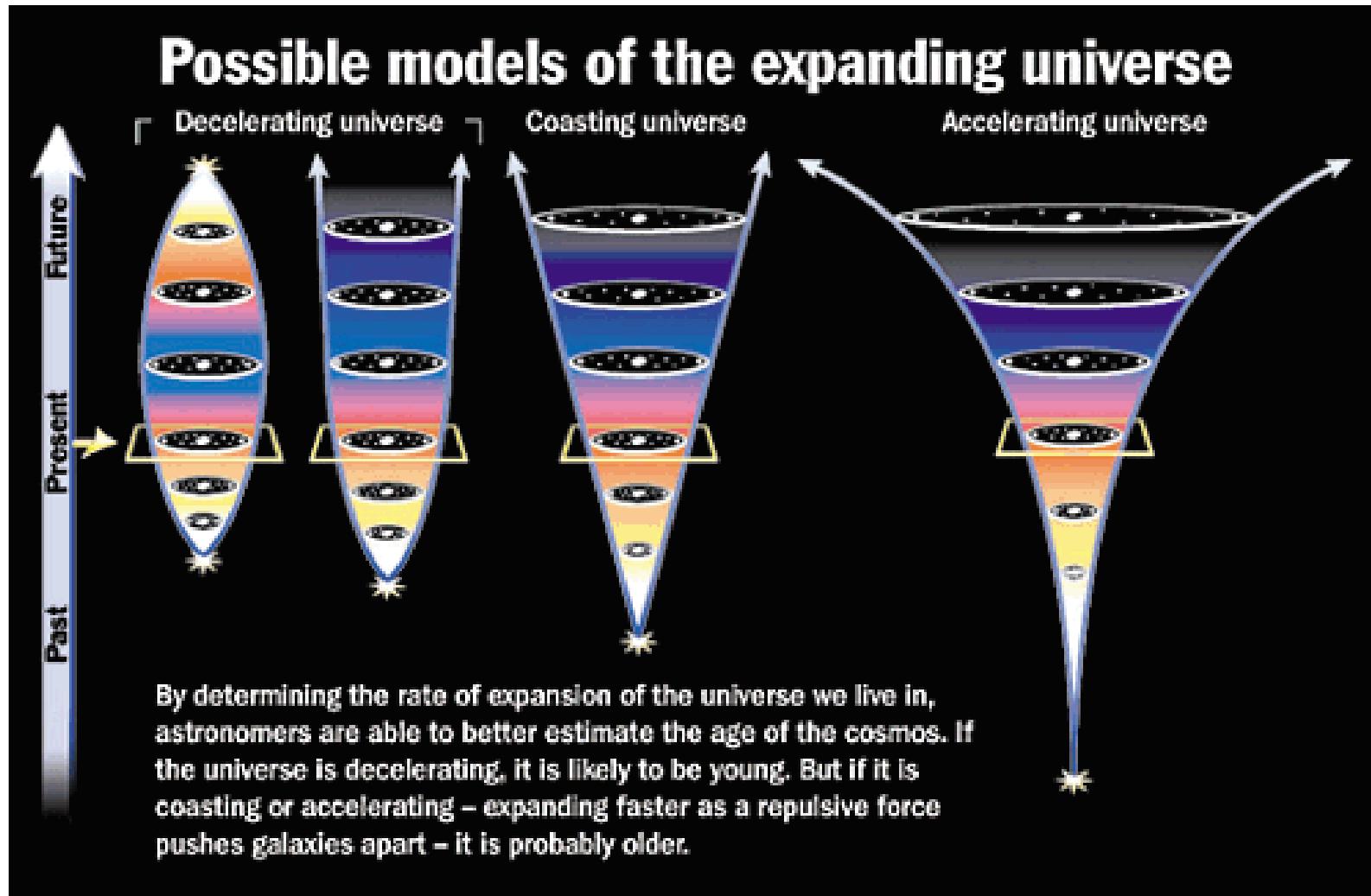


Figura 4. El tipo de geometría que describe un universo está directamente relacionada con el pasado y, más interesante, con el futuro de dicho universo.

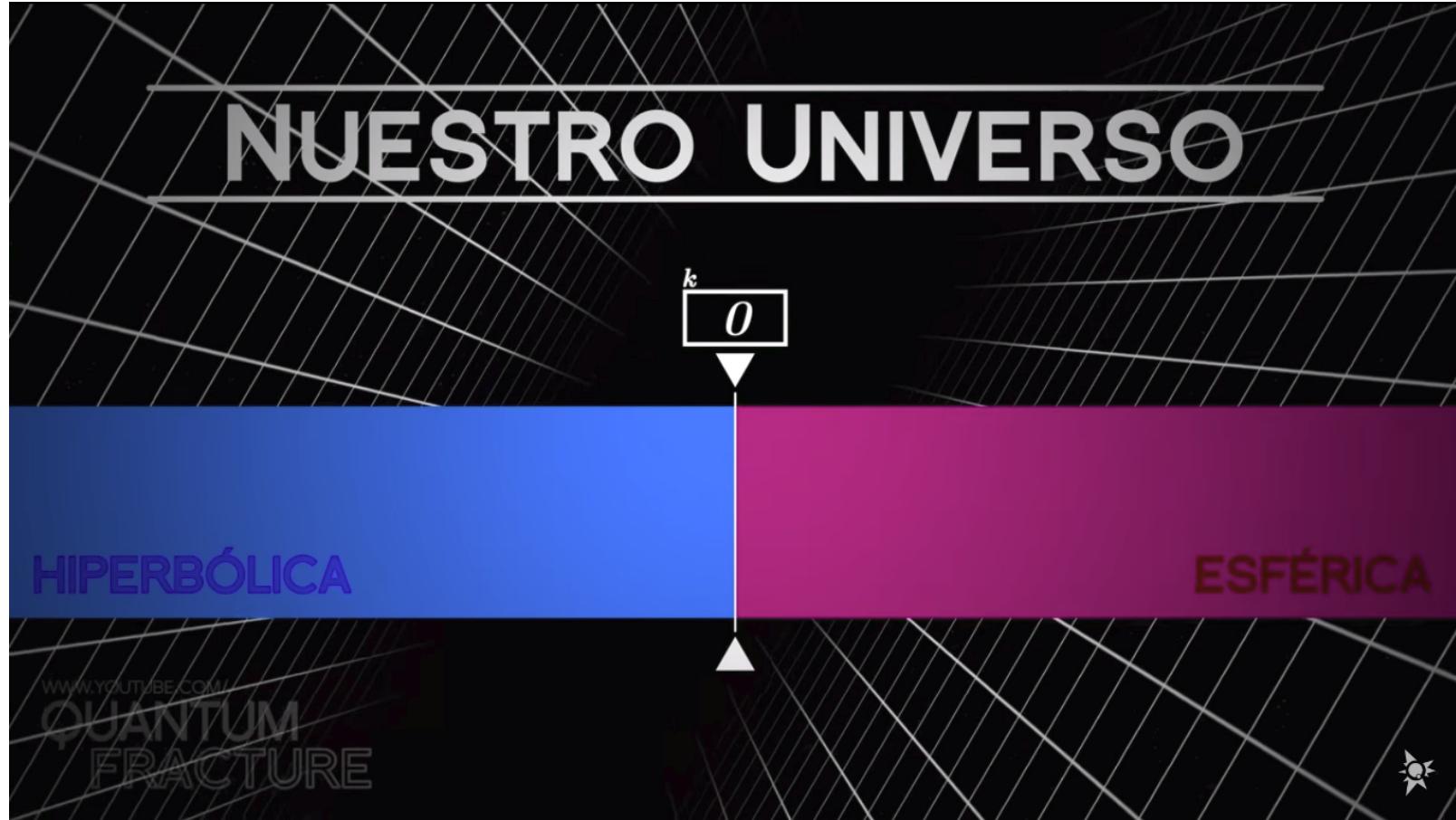
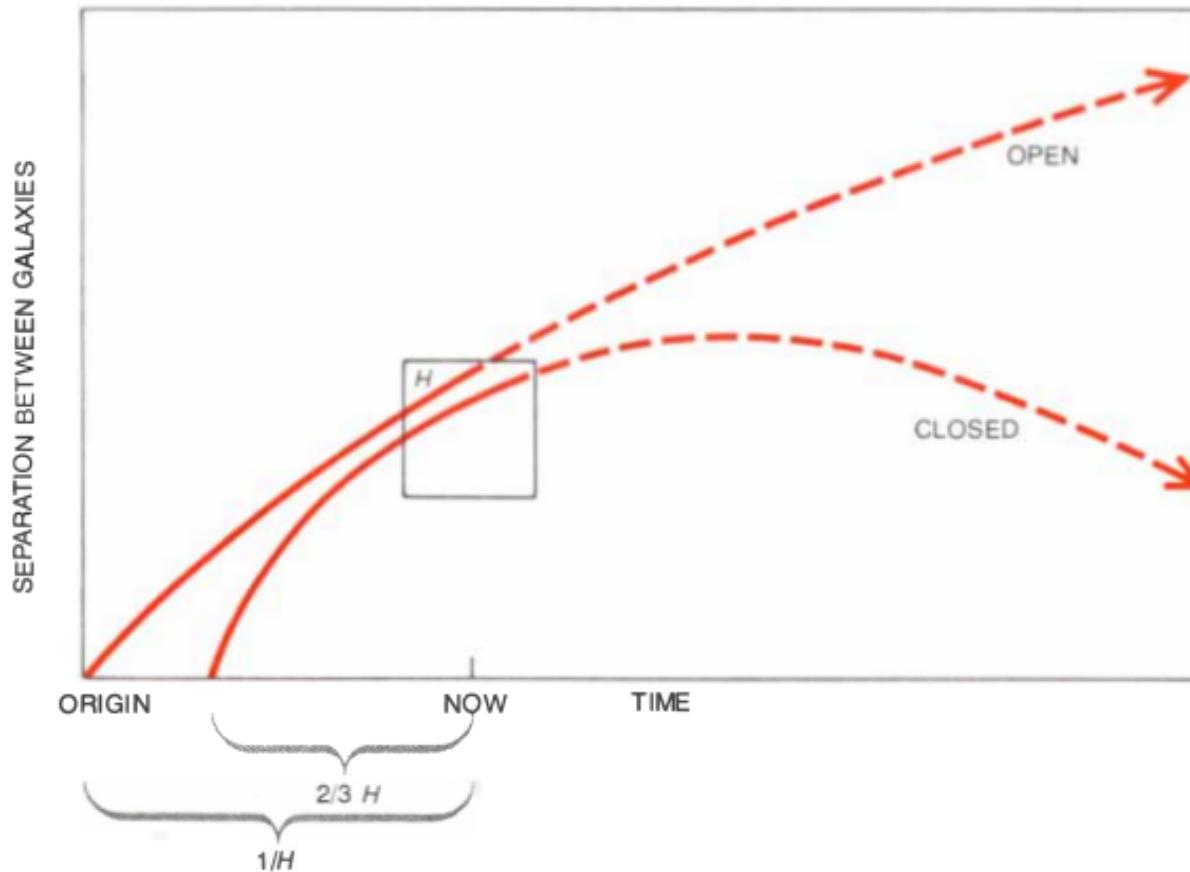


Figura 5. Representación del valor aproximado de  $k$  en nuestro universo.

Observaciones recientes y cada vez más precisas indican que el espacio tiempo es, muy probablemente, plano. Es decir, que  $k=0$ .<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Ver: **Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters**, arxiv.org/pdf/1502.01589v3.pdf e **Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples**, arxiv.org/pdf/1401.4064v2.pdf



**MODELS OF COSMIC EVOLUTION** indicate how the separation between the galaxies changes with time. If the universe continues to expand forever, the age of the universe is the Hubble time: the inverse of the Hubble constant ( $H$ ). An infinitely expanding universe is considered to be open. On the other hand, if the universe eventually stops expanding and starts contracting, the age of the universe is less than  $2/3 H$ . Such a universe is considered to be closed.

Figura 6. Imagen tomada de The Structure of the Early Universe, by John D. Barrow and Joseph Silk, 1980. Scientific American, Inc.

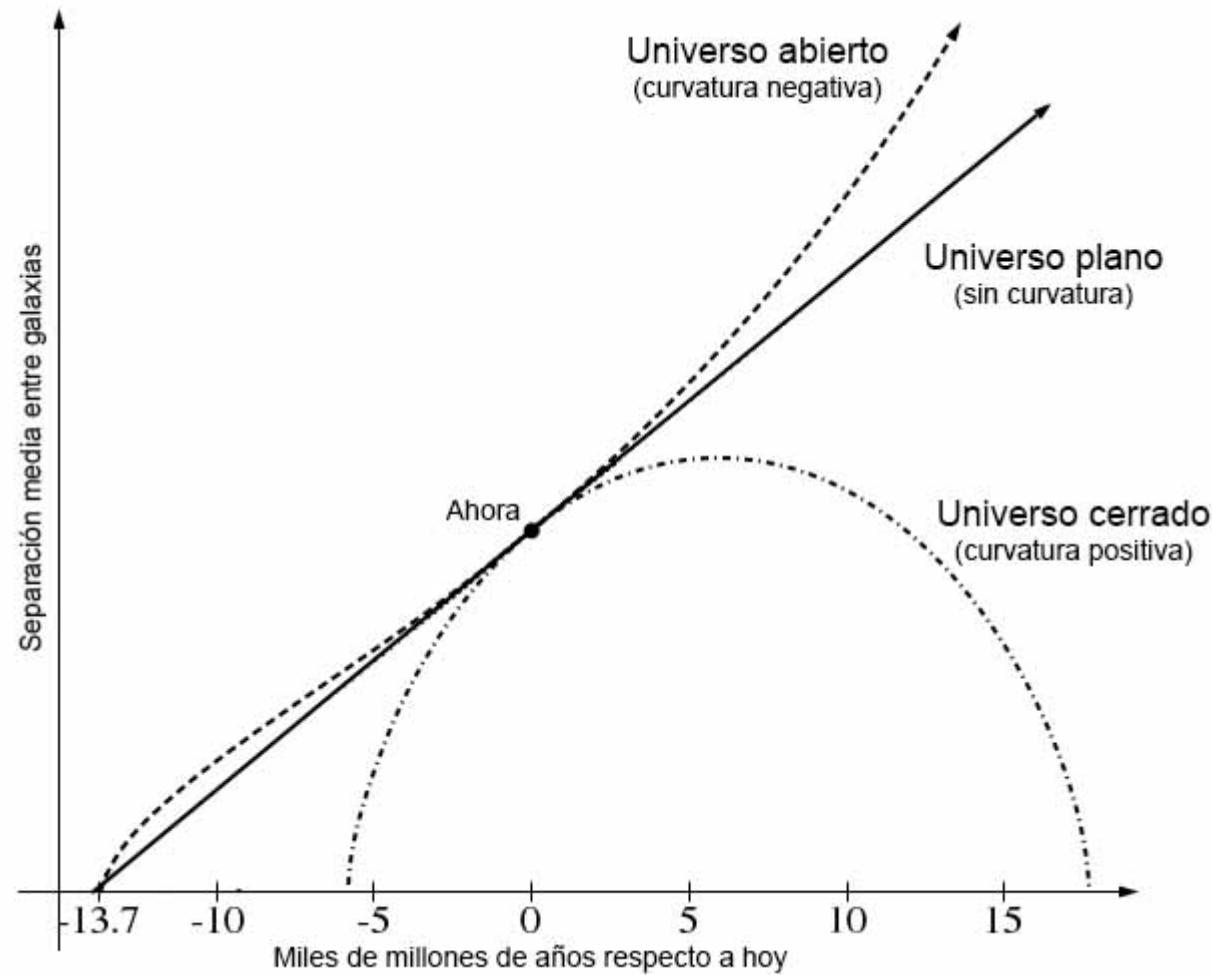


Figura 7. En el presente, las tres posibles curvaturas del universo parecen coincidir, quitándonos, en primera instancia, una inclinación especial sobre alguna.

## 2. Dinámica de la expansión

Ecuación de campo  
de Einstein

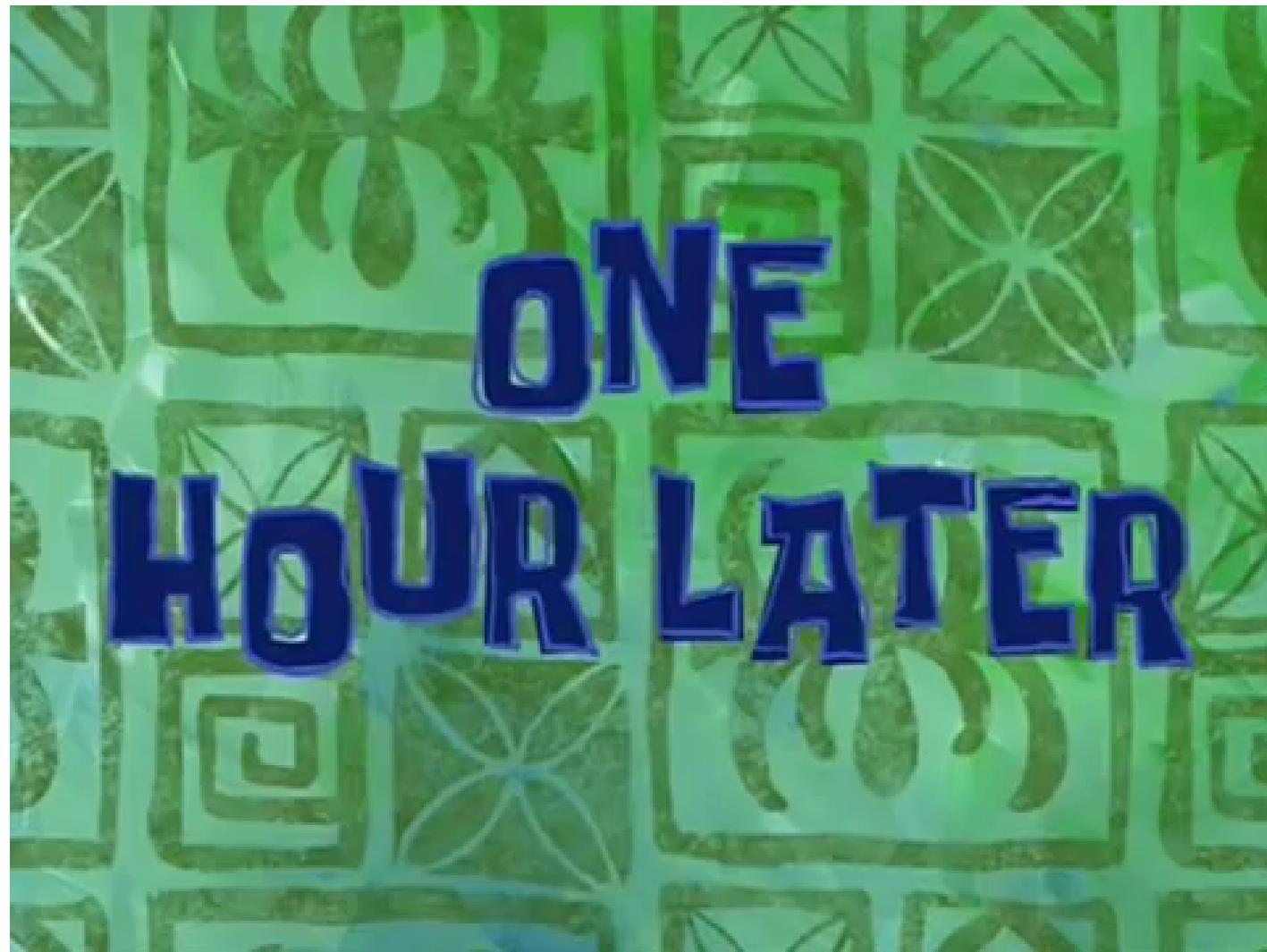
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

Tensor  
energía-momento

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} T^{\lambda\kappa}$$

Tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}$$



$$-2 \frac{k}{a^2} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G (\rho - p) \quad \text{Ec (1)}$$

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G (3p + \rho) \quad \text{Ec (2)}$$

Sumando 3 veces la Ec. (1) a la Ec. (2) obtenemos...

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8}{3}\pi G \rho a^2$$

*Ecuación fundamental de Friedmann que gobierna la expansión del universo.*<sup>4</sup>

Soluciones de Friedmann<sup>5</sup>:

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \frac{3p}{c^2}) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

<sup>4</sup> S. Weinberg, Cosmology, 1.5 Dynamics of expansion, 37 (Oxford University Press, 2008).

<sup>5</sup> Las ecuaciones de Friedmann realmente son relativistas, no newtonianas. Ver en R. d'Inverno, Introducing Einstein's Relativity, 22.9 Friedmann's equation, 322, 323 (Oxford University Press, 1992)

De la Ec (1) y Ec (2) es posible reproducir la *ley de conservación*:

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p)$$

Ec. (4)

Si bien a primera vista puede parecer nueva, de la Ec. (4) se deriva la Primer Ley de la Termodinámica<sup>6</sup> que es, como todos sabemos, la adaptación termodinámica de la Ley de Conservación de la Energía tradicional.

Si se escribe a la presión como función de la densidad, se puede resolver la Ec(4).

$$p = p(\rho)$$

Notemos también que la densidad, de manera natural, puede establecerse como función de a, y a su vez, a es función de t.

$$\rho = \rho(a) \rightarrow a = a(t)$$

---

<sup>6</sup> Ver desarrollo en el documento de texto adjunto a la presentación.

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p)$$

$$\rho = \frac{cte}{a^3}$$

- “Si la densidad presente del universo estuviera dominada por una materia no relativista, entonces  $p_0 \ll \rho_0$  .” <sup>7</sup>

Dominada por materia relativista:

$$p_o = \frac{\rho_o}{3}$$

Dominada por energía de vacío (vacuum energy):  $p_o = -\rho_o$

---

<sup>7</sup> S. Weinberg, Cosmology, 1.5 Dynamics of expansion, 39 (Oxford University Press, 2008)

---

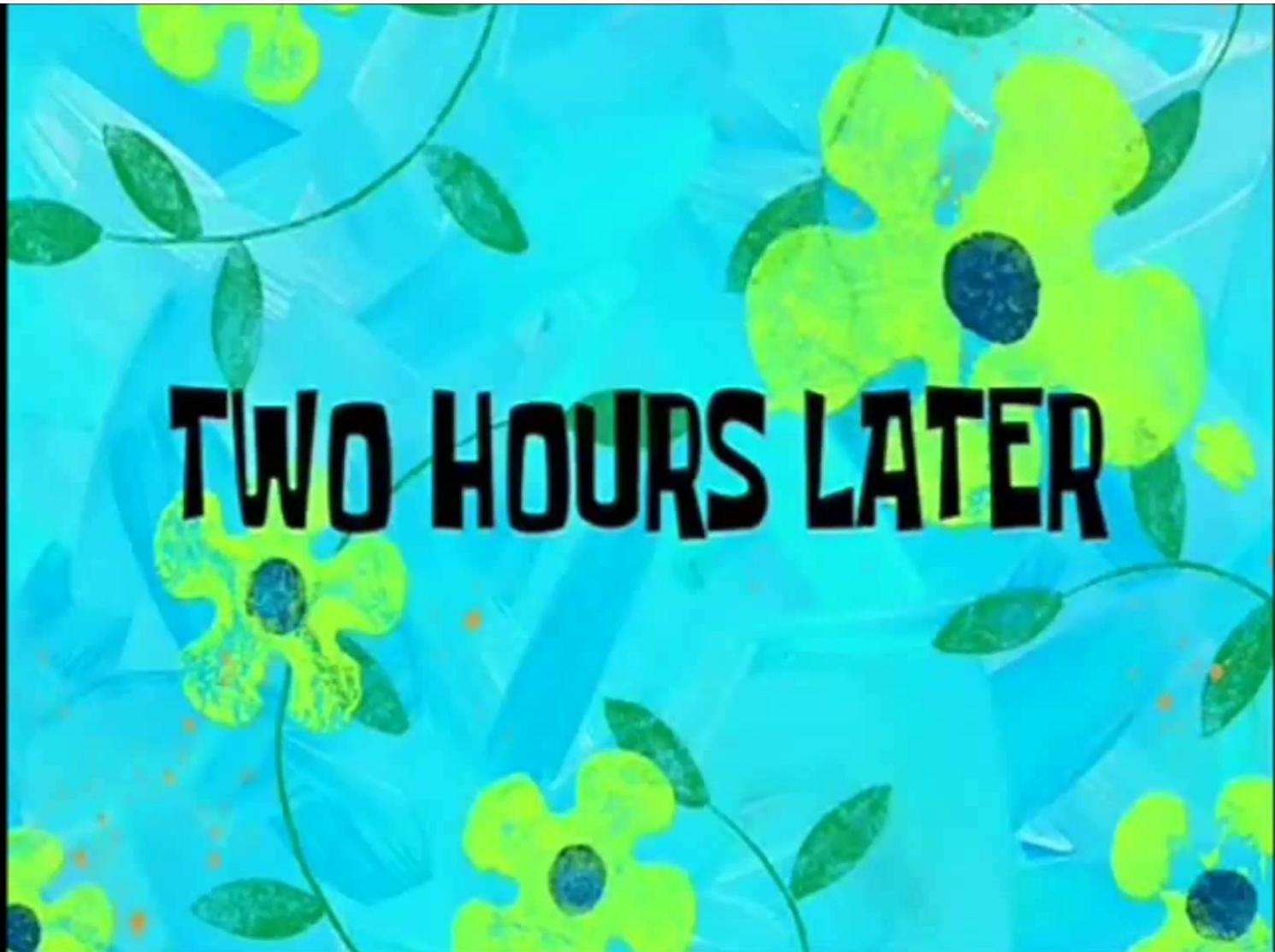
### 3. Introducción de variables termodinámicas

---

Consideremos ahora una partícula puntual de masa  $m$  que se mueve a través de un fluido. Dicho fluido experimenta una ganancia de energía térmica dentro de él:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{a}^2 - \frac{GmM}{a} - C_p M \Delta T$$

$$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow \rightarrow \rightarrow M = \rho V = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$



$$\dot{a}^2 - \frac{2E}{m} - \frac{8}{3} \frac{a^3 \pi \rho C_p \Delta T}{m} = \frac{8}{3} \pi G a^2 \rho$$

Recordemos la primera Ec. De Friedmann:

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8}{3} \pi G \rho a^2$$

$$k = -\frac{2E}{m} - \frac{8}{3} \frac{a^3 \pi \rho C_p \Delta T}{m}$$

Se corrobora  $\rho = \frac{cte}{a^3}$

- $k = -1$
- $k = 0$
- $k = +1$

$$\rho = -\frac{3(2E-m)}{8C_p \Delta T \pi} \frac{1}{a^3}$$

$$\rho = -\frac{3E}{4C_p \Delta T \pi} \frac{1}{a^3}$$

$$\rho = -\frac{3(m+2E)}{8C_p \Delta T \pi} \frac{1}{a^3}$$

$$cte = -\frac{3(2E-m)}{8C_p \Delta T \pi}$$

$$cte = -\frac{3E}{4C_p \Delta T \pi}$$

$$cte = -\frac{3(m+2E)}{8C_p \Delta T \pi}$$



## ■ Densidad crítica

Retomemos nuevamente la ecuación fundamental de Friedmann, y consideremos k=0

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8}{3} \pi G \rho a^2$$

$$\rho = \frac{3}{8} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{\pi G}$$

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\rho_c = \frac{3 H_o^2}{8 \pi G}$$

# 4. Calor específico del universo

- $k=-1$

$$C_p = -\frac{G(2E-m)}{\Delta T H_o^2} \frac{1}{a^3}$$

- $k=0$

$$C_p = -\frac{2EG}{\Delta T H_o^2} \frac{1}{a^3}$$

- $k=+1$

$$C_p = -\frac{G(m+2E)}{\Delta T H_o^2} \frac{1}{a^3}$$

Recordemos que  $\Delta T = T_f - T_i < 0$

$$\rho_c = 1.878 \times 10^{-29} h^2 g/cm^3$$

$h$  es la constante de Hubble en unidades de  $100 \frac{km}{s \cdot Mpc}$

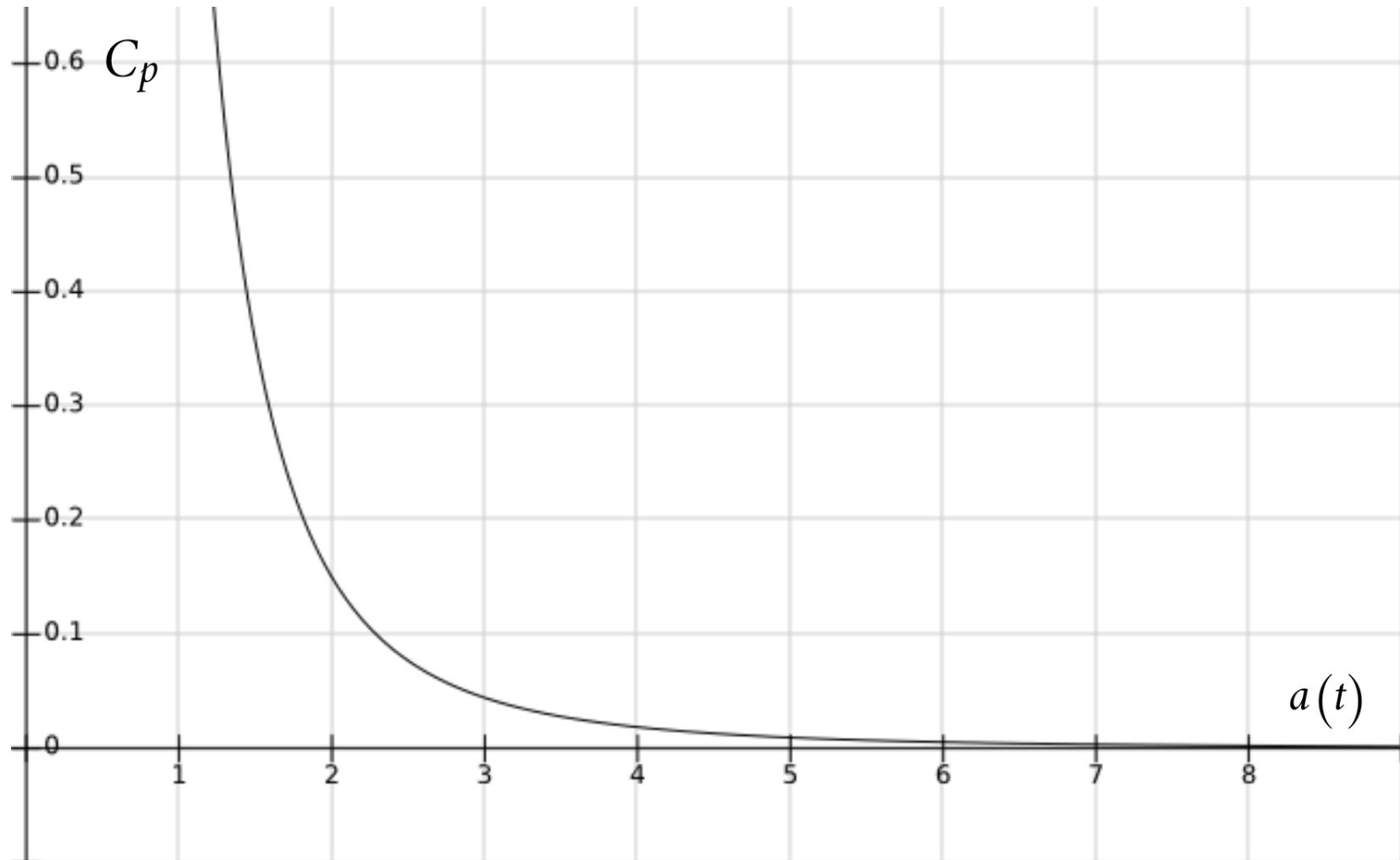
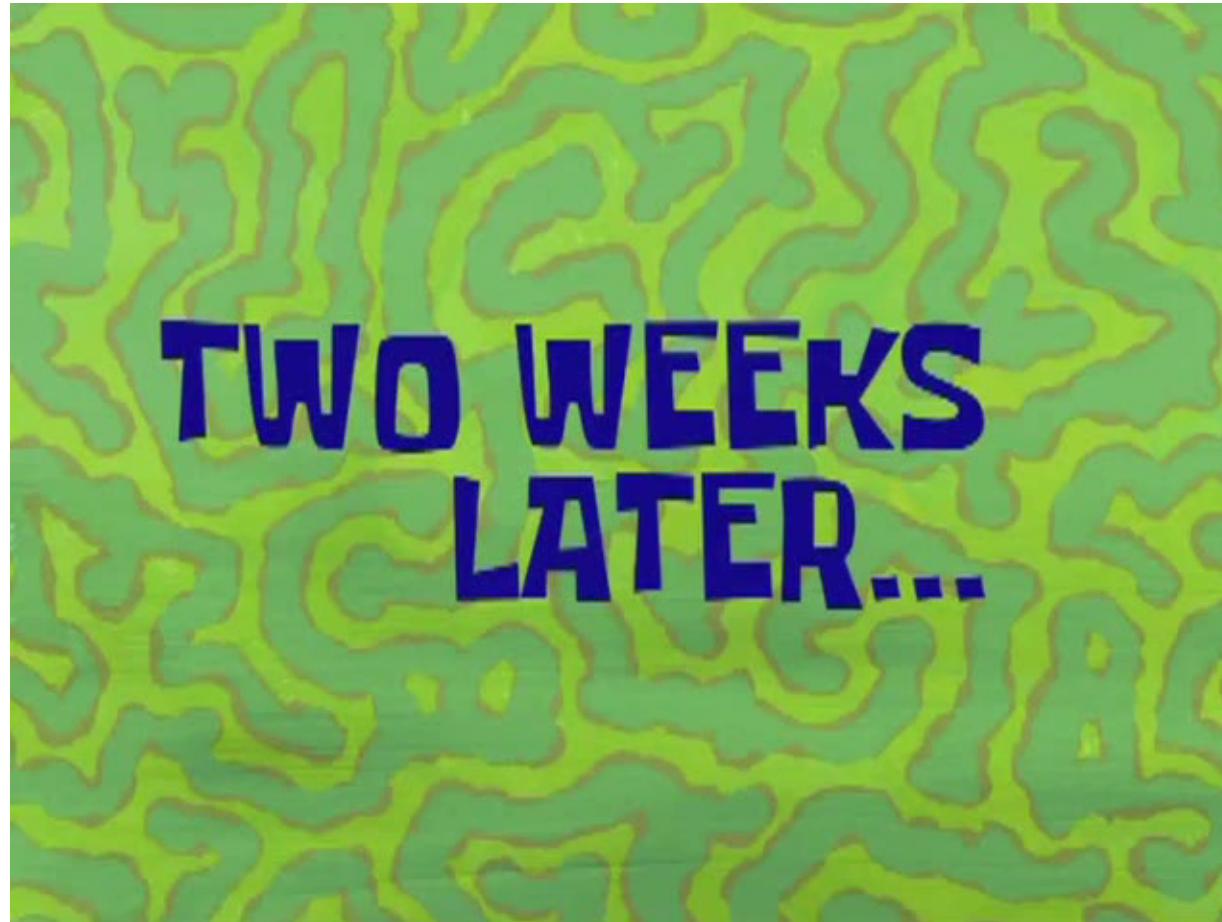


Figura 8. Comportamiento del calor específico en función del factor de escala.

---

# 5. El universo no tan temprano

---



# ■ Entropía

Las leyes de la termodinámica establecen que<sup>8</sup>:

- Cada cantidad de energía tiene una característica llamada entropía asociada a ella.
- La entropía mide el grado de desorden asociado con la energía.
- La energía siempre debe fluir en tal dirección que la entropía aumenta.
- Entonces, podemos organizar las diferentes formas de energía en un "orden de mérito", siendo la forma más alta la que tiene menos desorden o entropía.

---

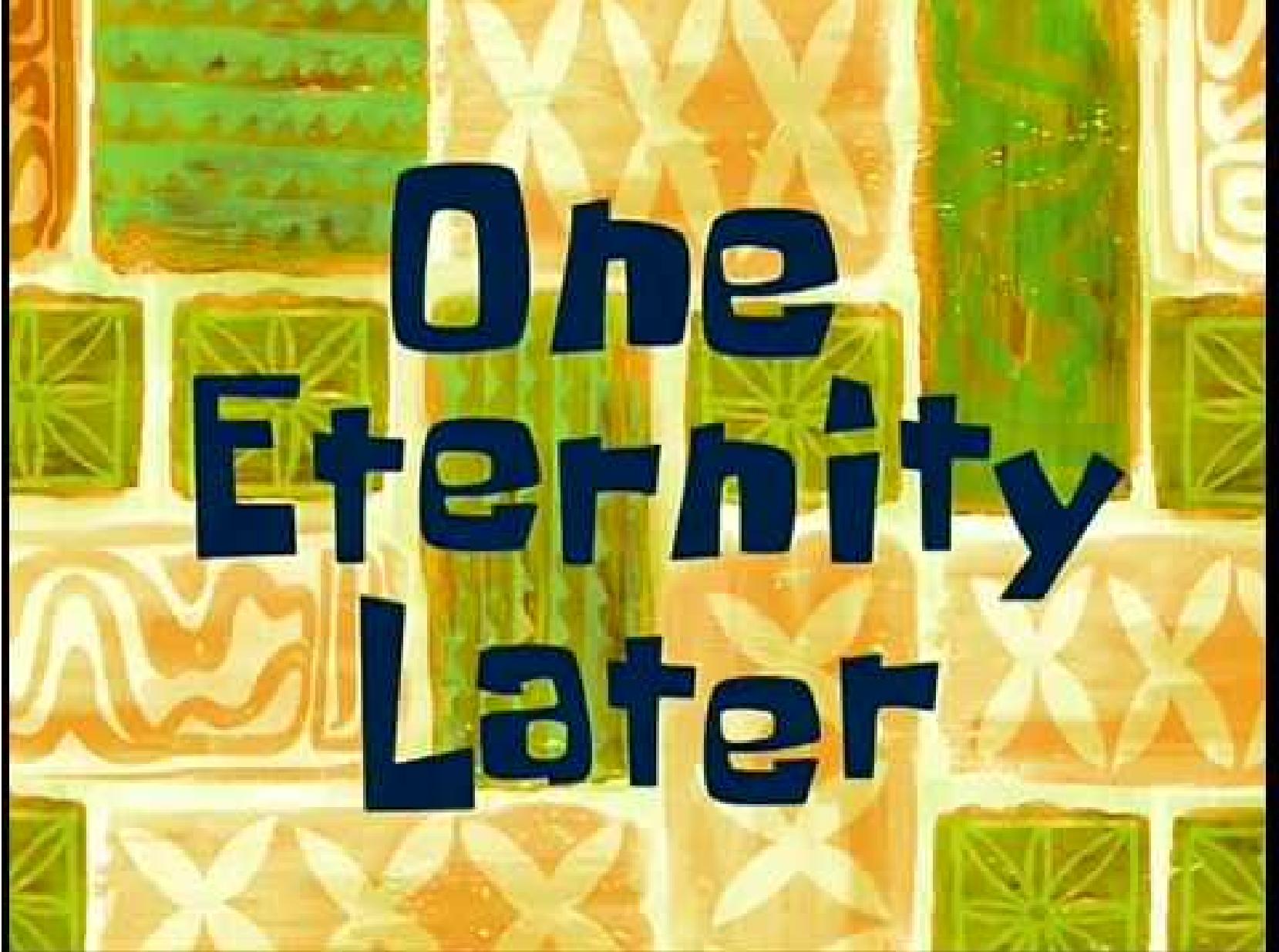
<sup>8</sup> Freeman J. Dyson, Energy in the Universe, **52** (Scientific American, Inc, 1971)

FORM OF ENERGY	ENTROPY PER UNIT ENERGY
GRAVITATION	0
ENERGY OF ROTATION	0
ENERGY OF ORBITAL MOTION	0
NUCLEAR REACTIONS	$10^{-6}$
INTERNAL HEAT OF STARS	$10^{-3}$
SUNLIGHT	1
CHEMICAL REACTIONS	1–10
TERRESTRIAL WASTE HEAT	10–100
COSMIC MICROWAVE RADIATION	$10^4$

**"ORDER OF MERIT"** of the major forms of energy in the universe ranks the various energy forms roughly according to their associated entropy per unit energy, expressed in units of inverse electron volts. The entropy, which measures the degree of disorder associated with a particular form of energy, varies approximately inversely with the temperature associated with that energy form. In the cases of gravitation, rotation and orbital motion there is no associated temperature and hence the entropy is zero. Energy generally flows from higher levels to lower levels in the table, that is, in such a direction that the entropy increases. The cosmic microwave background radiation appears to be an ultimate heat sink; no way is known in which this energy could be further degraded or converted into any other form. The universe survives not by any inherent stability but by a succession of seemingly accidental "hangups," or obstacles, usually arising from some quantitative feature of the design of the universe, that act to arrest the normal processes of the degradation of energy.

52

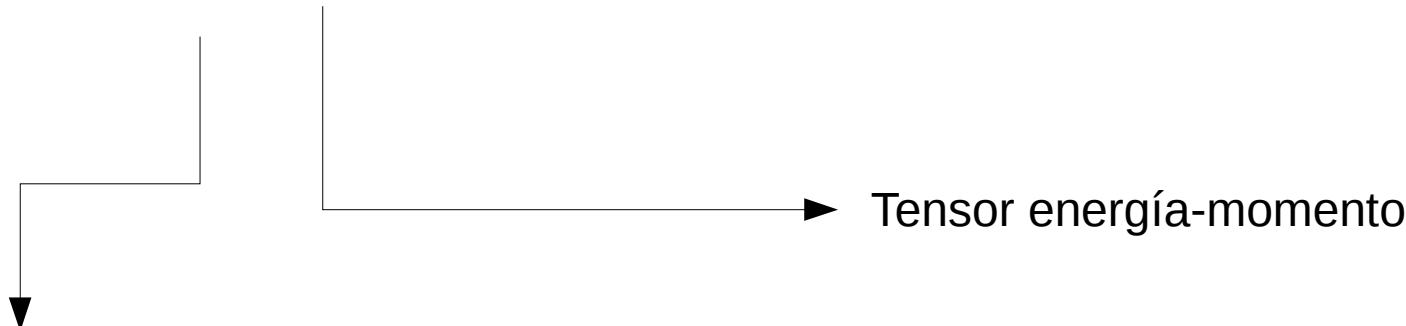
Figura 9. Tabla denominada Orden de mérito <sup>8</sup>. Imagen tomada de Energy in the Universe, by Freeman J. Dyson, 1971. Scientific American, Inc.



**One  
Eternity  
Later**

# ■ Densidad del universo

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

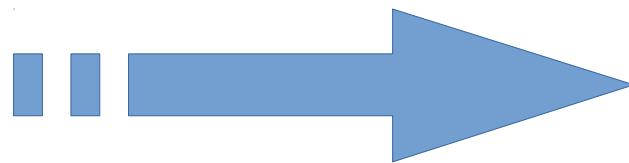


Derivada covariante

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) \quad \text{Que se había resuelto para } p \ll \rho$$

$$p_{\alpha} = w_{\alpha} \rho_{\alpha}$$

$w=0$



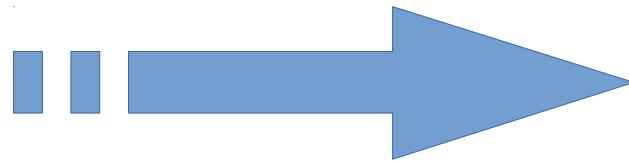
Fluido perfecto con sólo densidad de materia, sin presión, sin interacciones.  
**Materia fría.**

$w=1/3$



**Materia muy caliente, materia relativista o radiación.**

$w=-1$



Constante cosmológica

$$\rho_\alpha(t) = \frac{\rho_o}{a^{3(w+1)}}$$

w=0

$$\rho_\alpha = \frac{\rho_o}{a^3}$$

La densidad del universo decrece de manera proporcionalmente inversa al aumento de su volumen.

w=1/3

$$\rho_\alpha = \frac{\rho_o}{a^4}$$

Además de caer inversamente proporcional al volumen, hay otro factor adicional que indica que cae de forma lineal también (linealmente respecto al nuevo factor). Esto es la pérdida de energía de las galaxias en el corrimiento hacia el rojo de la radiación.

w=-1

$$\rho_\alpha = \rho_o$$

Densidad de energía constante.

---

# 6. Conclusiones

---

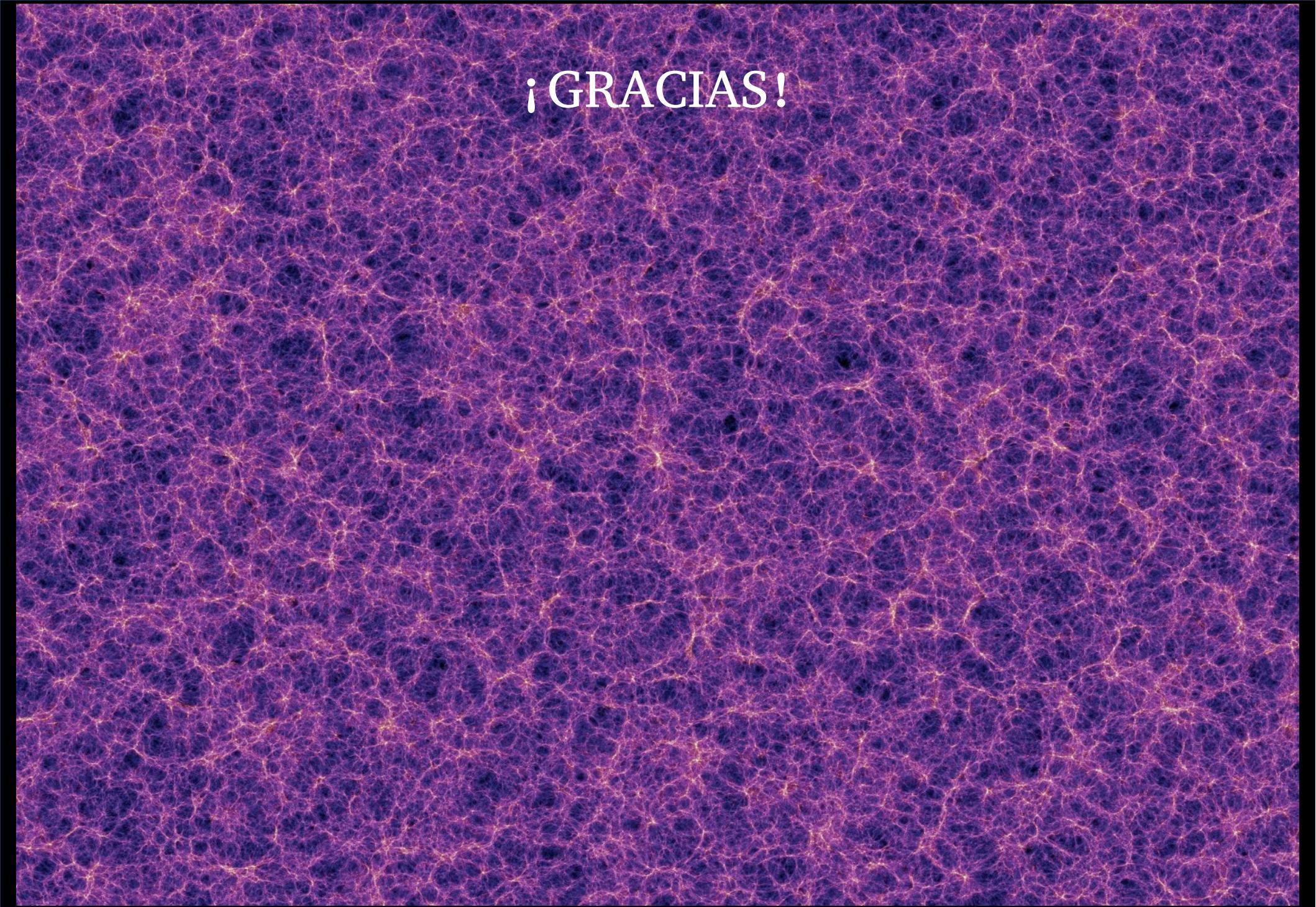
- ✓ Considerar el universo temprano, así como a grandes escalas, puede simplificar mucho su estudio al presentarse como un universo homogéneo e isótropo.
- ✓ No se asegura con 100% de certeza que nuestro universo sea plano, pues existe la posibilidad que nuestro universo observable (con un valor de  $k$  muy cercano a 0) sea realmente un estudio local comparado con el universo existente, que podría tener una curvatura no nula.
- ✓ El valor de  $k$  puede determinar el final de nuestro universo o, en todo caso, su expansión infinita.
- ✓ Las leyes de conservación de energía-momento pueden derivarse como una consecuencia de las ecuaciones de campo de Einstein.
- ✓ Es imprescindible el conocimiento del tipo de materia que gobierna el universo, si se desea conocer su dinámica (y termodinámica).
- ✓ Los parámetros de un universo con materia no relativista (como la presión, densidad y el calor específico) se ven dominados por la expansión de éste. Según pasa el tiempo, el radio del universo crece y dichos parámetros decrecen de la forma  $\text{cte}/a^3$  con  $a=a(t)$  el factor de escala.
- ✓ El estudio de la entropía de diferentes sistemas físicos ofrece resultados interesantes; la tabla *Orden de mérito*, que relaciona ordenadamente diferentes tipos de energía con su entropía asociada, es una herramienta que permite seleccionar el tipo de energía para trabajar que nos genere mayor eficacia (es decir, menos pérdida) a la hora de aprovechar dicha energía (transformarla en otro tipo de energía para nuestro uso).

---

# 7. Bibliografía

---

- <sup>1</sup> S. Weinberg, Cosmology, *1.1 Spacetime geometry*, **2, 3** (Oxford University Press, 2008).
- <sup>2</sup> Cosmología en la teoría general de la relatividad, Rafael Zamora Ramos.  
[http://rafaelzamora.es/Cosmologia\\_en\\_la\\_teoria\\_de\\_la\\_relatividad.pdf](http://rafaelzamora.es/Cosmologia_en_la_teoria_de_la_relatividad.pdf), **3**
- <sup>3</sup> **Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters**, arxiv.org/pdf/1502.01589v3.pdf  
e **Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples** arxiv.org/pdf/1401.4064v2.pdf
- <sup>4</sup> S. Weinberg, Cosmology, *1.5 Dynamics of expansion*, **37** (Oxford University Press, 2008).
- <sup>5</sup> R. d'Inverno, Introducing Einstein's Relativity, *22.9 Friedmann's equation*, **322, 323** (Oxford University Press, 1992).
- <sup>6</sup> El desarrollo de la primer ley de la termodinámica a partir de la ley de conservación está en el documento de texto adjunto a la presentación.
- <sup>7</sup> S. Weinberg, Cosmology, *1.5 Dynamics of expansion*, **39** (Oxford University Press, 2008).
- <sup>8</sup> Freeman J. Dyson, Energy in the Universe, **52** (Scientific American, Inc, 1971)



¡GRACIAS!

Figura 10. La simulación del milenio.