PROBLEMAS

2.1. La ecuación de estado de un gas perfecto es $Pv = R\theta$. Demostrar que (*a*) $\beta = 1/\theta$ y (*b*) $\kappa = 1/P$.

2.2. Para un gas real a presiones moderadas, $P(v-b) = R\theta$, donde R y b son constantes, es una ecuación de estado aproximada que tiene en cuenta el tamaño finito de las moléculas. Demostrar que

(*a*) $$\beta = \frac{1/\theta}{1 + bP/R\theta},$$

(*b*) $$\kappa = \frac{1/P}{1 + bP/R\theta}.$$

2.3. $Pv = R\theta(1 + B/v)$, donde R es una constante y B sólo es función de la temperatura, es la ecuación de estado aproximada para un gas real a presión moderada. Demostrar que

(*a*) $$\beta = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{v + B + \theta(dB/d\theta)}{v + 2B},$$

(*b*) $$\kappa = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{1 + BR\theta/Pv^2}.$$

2.4. Un metal cuyo coeficiente de dilatación cúbica es 5.0×10^{-5} K^{-1} y su compresibilidad isotérmica es 1.2×10^{-11} Pa está a una presión de 1×10^5 Pa y a una temperatura de 20 °C, envuelto por una cubierta gruesa de invar —de dilatación cúbica y compresibilidad despreciables— muy ajustada a él.

(*a*) ¿Cuál será la presión final al elevar la temperatura hasta 32 °C?

(*b*) ¿Cuál es la mayor temperatura que puede alcanzar el sistema si la máxima presión que puede resistir la envoltura de invar es de 1.2×10^8 Pa?

2.5. Un bloque del mismo metal que el del Problema 2.4, cuyo volumen es de 5 litros, a la presión de 1×10^5 Pa y a la temperatura de 20 °C, experimenta un aumento de temperatura de 12 grados y su volumen aumenta en 0.5 cm^3. Calcular la presión final.

2.6. (*a*) Expresar el coeficiente de dilatación cúbica y la compresibilidad isotérmica en función de la densidad ρ y de sus derivadas parciales.

(*b*) Deducir la ecuación

$$\frac{dV}{V} = \beta\, d\theta - \kappa\, dP.$$

2.7. En la tabla adjunta figuran el coeficiente de dilatación cúbica y la compresibilidad del oxígeno líquido. Demostrar gráficamente que $(\partial P/\partial\theta)_V$ depende de la temperatura.

θ, K	60	65	70	75	80	85	90
β, 10^{-3} K^{-1}	3.48	3.60	3.75	3.90	4.07	4.33	4.60
κ, 10^{-9} Pa^{-1}	0.95	1.06	1.20	1.35	1.54	1.78	2.06

2.8. En la tabla adjunta figuran el coeficiente de dilatación cúbica y la compresibilidad del agua. Demostrar gráficamente que $(\partial P/\partial\theta)_V$ depende de la temperatura. Si se mantuviera constante el volumen y la temperatura aumentará continuamente, ¿aumentaría la presión indefinidamente?

t, °C	0	50	100	150	200	250	300
β, 10^{-3} K^{-1}	−0.07	0.46	0.75	1.02	1.35	1.80	2.90
κ, 10^{-9} Pa^{-1}	0.51	0.44	0.49	0.62	0.85	1.50	3.05

2.9. En el punto crítico $(\partial P/\partial V)_T = 0$. Demostrar que en dicho punto el coeficiente de dilatación cúbica y la compresibilidad isotérmica son infinitos.

2.10. Si un alambre experimenta un cambio infinitesimal desde un estado inicial de equilibrio a otro final, también de equilibrio, demostrar que la variación de tensión es

$$d\mathcal{F} = -\alpha A Y \, d\theta + \frac{AY}{L} dL.$$

2.11. Un hilo metálico de 0.0085 cm^2 de sección está sometido a una tensión de 20 N, a la temperatura de 10 °C, entre dos soportes rígidos separados 1.2 m. ¿Cuál es la tensión final, si la temperatura se reduce a 8 °C? (Suponer que α e Y tienen valores constantes e iguales a 1.5×10^{-5} K^{-1} y 2.0×10^9 N/m^2, respectivamente.)

2.12. La frecuencia fundamental de vibración de un alambre de longitud L, masa m y tensión $\mathcal{F}$ es

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\mathcal{F}L}{m}}.$$

¿Con qué frecuencia vibrará el hilo del Problema 2.11 a 20 °C? ¿Y a 8 °C? (La densidad del alambre es 9.0×10^3 kg/m^3.)

2.13. Si además de las condiciones mencionadas en el Problema 2.11 los soportes se acercan 0.012 cm, ¿cuál será la tensión final?

2.14. La ecuación de estado de una sustancia elástica ideal es

$$\mathcal{F} = K\theta\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right),$$

siendo K una constante y L_0 (el valor de L a tensión nula) sólo función de la temperatura.

(*a*) Demostrar que el módulo de Young isotérmico viene dado por

$$Y = \frac{K\theta}{A}\left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2}\right).$$

(*b*) Demostrar que el módulo de Young isotérmico a tensión nula es

$$Y_0 = \frac{3K\theta}{A}.$$

(*c*) Demostrar que el coeficiente de dilatación lineal viene dado por

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{\mathcal{F}}{AY\theta} = \alpha_0 - \frac{1}{\theta} \cdot \frac{L^3/L_0^3 - 1}{L^3/L_0^3 = 2},$$

siendo α_0 el valor del coeficiente de dilatación lineal a tensión nula, o sea,

$$\alpha_0 = \frac{1}{L_0}\frac{dL_0}{d\theta}.$$

(*d*) Para una cierta muestra de caucho, suponer los valores siguientes: $\theta = 300$ K, $K = 1.33 \times 10^{-2}$ N/K, $A = 1 \times 10^{-6}$ m^2, $\alpha_0 = 5 \times 10^{-4}$ K^{-1}. Calcular $\mathcal{F}$, Y y α para los siguientes valores de L/L_0:0.5, 1.0, 1.5, 2.0. Demostrar gráficamente cómo $\mathcal{F}$, Y y α dependen de la razón L/L_0.

2.15. La ecuación de Brillouin

$$M = Ng\mu_B\left[(J + \tfrac{1}{2}) \coth\, (J + \tfrac{1}{2})\frac{g\mu_B\mathcal{H}}{k\theta} - \tfrac{1}{2} \coth\, \tfrac{1}{2}\frac{g\mu_B\mathcal{H}}{k\theta}\right],$$

en la que N, g, μ_B, J y K son constantes atómicas, es la ecuación de estado para un material paramagnético ideal, válida para todos los valores de la razón $\mathcal{H}/\theta$.

(*a*) Hallar cómo varía la cotangente hiperbólica de x cuando x tiende a cero.

(*b*) Demostrar que la ecuación de Brillouin se reduce a la de Curie cuando $\mathcal{H}/\theta$ tiende a cero.

(*c*) Demostrar que la constante de Curie viene dada por

$$C_C' = \frac{Ng^2J(J + 1)\mu_B^2\,\mu_0}{3k}.$$